

Часть 4

Приложения определённых интегралов. Кратные и криволинейные интегралы.

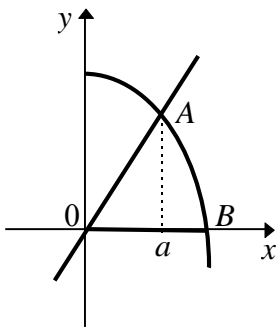
Задача № 1

Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривыми:

$$\begin{aligned} 1. & y = a_{11}^2 x, y = a_{12}^2 - x^2, y = 0 \ (x \geq 0); \\ 2. & y = a_{21}^2 x^2, y^2 = a_{22}^2 x. \end{aligned}$$

Решение

1.



Итак, нужно найти объем V тела, полученного вращением фигуры OAB вокруг оси Ox . Очевидно, $V = V_1 + V_2$, где V_1 – объем, полученный вращением вокруг Ox треугольника OAA , а V_2 – объем, полученный вращением вокруг Ox криволинейной трапеции aAB . Учитывая, что уравнение прямой OA имеем вид $y = a_{11}^2 x$, получаем:

$$V_1 = \pi \int_0^a (a_{11}^2 x)^2 dx = \pi a_{11}^4 \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \pi a_{11}^4 \frac{a^3}{3}.$$

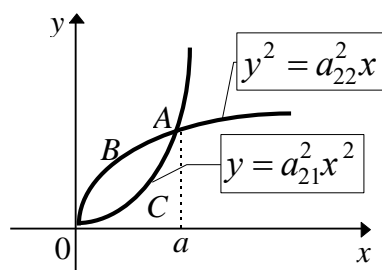
Так как уравнение кривой AB имеет вид $y = a_{12}^2 - x^2$, то, положив в этом уравнении $y = 0$, получаем, что абсцисса точки B равна $|a_{12}|$. Поэтому:

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_a^{|a_{12}|} (a_{12}^2 - x^2)^2 dx = \pi \int_a^{|a_{12}|} (a_{12}^4 - 2a_{12}^2 x^2 + x^4) dx = \pi \left(a_{12}^4 x - \frac{2}{3} a_{12}^2 x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_a^{|a_{12}|} = \\ &= \pi \left[|a_{12}|^5 - \frac{2}{3} |a_{12}|^5 + \frac{|a_{12}|^5}{5} - a_{12}^4 a + \frac{2}{3} a_{12}^2 a^3 - \frac{a^5}{5} \right] = \pi \left[\frac{8}{15} |a_{12}|^5 - a_{12}^4 a + \frac{2}{3} a_{12}^2 a^3 - \frac{a^5}{5} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы найти абсциссу a точки пересечения A , решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = a_{11}^2 x \\ y = a_{12}^2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow a_{11}^2 x = a_{12}^2 - x^2 \Rightarrow x^2 + a_{11}^2 x - a_{12}^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a_{11}^2 \pm \sqrt{a_{11}^4 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Так как $a > 0$, то $a = \frac{-a_{11}^2 + \sqrt{a_{11}^4 + 4a_{12}^2}}{2}$. Подставив это значение a в V_1 и V_2 , получаем окончательный результат $V = V_1 + V_2$, который можно дать в приближенном виде. \square



2. Итак, нужно найти объем V тела, полученного вращением фигуры $OBAС$ вокруг оси Ox . Очевидно, $V = V_1 - V_2$, где V_1 – объем, полученный вращением вокруг Ox криволинейной трапеции $OBAa$, а V_2 – объем, полученный вращением вокруг Ox криволинейной трапеции $OCAa$.

$$V_1 = \pi \int_0^a a_{22}^2 x dx = \pi a_{22}^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \pi a_{22}^2 \frac{a^2}{2};$$

$$V_2 = \pi \int_0^a a_{21}^4 x^4 dx = \pi a_{21}^4 \frac{x^5}{5} \Big|_0^a = \pi a_{21}^4 \frac{a^5}{5}.$$

Чтобы найти абсциссу a точки пересечения A , решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = a_{21}^2 x^2 \\ y^2 = a_{22}^2 x \end{cases} \Rightarrow a_{21}^4 x^4 = a_{22}^2 x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt[3]{\frac{a_{22}^2}{a_{21}^4}}.$$

Так как $a > 0$, то $a = \sqrt[3]{\frac{a_{22}^2}{a_{21}^4}}$. Подставив это значение a в V_1 и V_2 , получаем окончательный результат $V = V_1 - V_2$, который можно дать в приближенном виде.

□

Задача № 2

Вычислить повторные интегралы:

$$\begin{aligned} 1. & \int_{a_{11}}^{a_{12}} dx \int_{a_{12}}^{a_{13}} (b_1 x^2 + \sqrt{b_2 y} + e^{b_3 x}) dy; \\ 2. & \int_{a_{21}}^{a_{22}} dy \int_{a_{32}}^{a_{33}} (b_1 y^2 + b_2 \sqrt{x}) dx. \end{aligned}$$

Решение

1. Сначала вычисляем внутренний интеграл по переменной y (считая x постоянной), а затем вычисляем внешний интеграл по переменной x :

$$\begin{aligned} \int_{a_{11}}^{a_{12}} dx \int_{a_{12}}^{a_{13}} (b_1 x^2 + \sqrt{b_2 y} + e^{b_3 x}) dy &= \int_{a_{11}}^{a_{12}} \left(b_1 x^2 y + \frac{2}{3} \sqrt{b_2} y^{3/2} + e^{b_3 x} y \right) \Big|_{a_{12}}^{a_{13}} dx = \\ &= \int_{a_{11}}^{a_{12}} \left[b_1 x^2 (a_{13} - a_{12}) + \frac{2}{3} \sqrt{b_2} (\sqrt{a_{13}^3} - \sqrt{a_{12}^3}) + e^{b_3 x} (a_{13} - a_{12}) \right] dx = \\ &= \left(b_1 (a_{13} - a_{12}) \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{b_2} (\sqrt{a_{13}^3} - \sqrt{a_{12}^3}) x + \frac{a_{13} - a_{12}}{b_3} e^{b_3 x} \right) \Big|_{a_{11}}^{a_{12}} = \end{aligned}$$

$$= b_1(a_{13} - a_{12}) \frac{a_{12}^3 - a_{11}^3}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{b_2} (\sqrt{a_{13}^3} - \sqrt{a_{12}^3}) (a_{12} - a_{11}) + \frac{a_{13} - a_{12}}{b_3} (e^{b_3 a_{12}} - e^{b_3 a_{11}}).$$

□

2. Сначала вычисляем внутренний интеграл по переменной x (считая y постоянной), а затем вычисляем внешний интеграл по переменной y :

$$\begin{aligned} \int_{a_{21}}^{a_{22}} dy \int_{a_{32}}^{a_{33}} (b_1 y^2 + b_2 \sqrt{x}) dx &= \int_{a_{21}}^{a_{22}} \left(b_1 y^2 x + b_2 \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_{a_{32}}^{a_{33}} dy = \\ &= \int_{a_{21}}^{a_{22}} \left(b_1 y^2 (a_{33} - a_{32}) + \frac{2}{3} b_2 (a_{33}^{3/2} - a_{32}^{3/2}) \right) dy = \left(b_1 (a_{33} - a_{32}) \frac{y^3}{3} + \frac{2}{3} b_2 (a_{33}^{3/2} - a_{32}^{3/2}) y \right) \Big|_{a_{21}}^{a_{22}} = \\ &= \frac{b_1 (a_{33} - a_{32})}{3} (a_{22}^3 - a_{21}^3) + \frac{2}{3} b_2 (a_{33}^{3/2} - a_{32}^{3/2}) (a_{22} - a_{21}). \end{aligned}$$

□

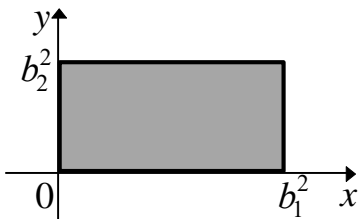
Задача № 3

Вычислить двойной интеграл по области D , ограниченной линиями:

1. $\iint_D (a_{11} x^2 + a_{22} y) dx dy$, $D: x = 0, x = b_1^2, y = 0, y = b_2^2$;
2. $\iint_D (a_{21} x + a_{22} y) dx dy$, $D: y = b_1^2 x^2, y = 2b_1^2$.

Решение

1. Сделаем чертеж:

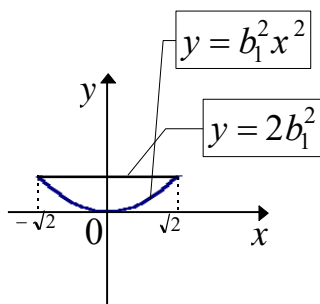


Применяя формулу перехода от двойного интеграла к повторному, получаем:

$$\begin{aligned} \iint_D (a_{11} x^2 + a_{22} y) dx dy &= \int_0^{b_1^2} dx \int_0^{b_2^2} (a_{11} x^2 + a_{22} y) dy = \\ &= \int_0^{b_1^2} \left(a_{11} x^2 y + a_{22} \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{b_2^2} dx = \int_0^{b_1^2} \left(a_{11} b_2^2 x^2 + \frac{a_{22}}{2} b_2^4 \right) dx = \\ &= \left(\frac{a_{11} b_2^2 x^3}{3} + \frac{a_{22}}{2} b_2^4 x \right) \Big|_0^{b_1^2} = \frac{a_{11} b_2^2 b_1^6}{3} + \frac{a_{22} b_2^4 b_1^2}{2}. \end{aligned}$$

□

2. Сделаем чертеж:



Найдем точки входа и выхода области D , то есть точки пересечения параболы $y = b_1^2 x^2$ и прямой $y = 2b_1^2$. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = b_1^2 x^2 \\ y = 2b_1^2 \end{cases} \Rightarrow b_1^2 x^2 = 2b_1^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2} \text{ (здесь было учтено,}$$

что во всех вариантах $b_1 \neq 0$).

Имеем:

$$\begin{aligned} \iint_D (a_{21}x + a_{22}y) dx dy &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{b_1^2 x^2}^{2b_1^2} (a_{21}x + a_{22}y) dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(a_{21}xy + \frac{a_{22}y^2}{2} \right) \Big|_{b_1^2 x^2}^{2b_1^2} dx = \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2a_{21}b_1^2 x + 2a_{22}b_1^4 - a_{21}b_1^2 x^3 - \frac{a_{22}b_1^4 x^4}{2} \right) dx = \\ &= \left(a_{21}b_1^2 x^2 + 2a_{22}b_1^4 x - \frac{a_{21}b_1^2 x^4}{4} - \frac{a_{22}b_1^4 x^5}{10} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \\ &= \left(2a_{21}b_1^2 + 2\sqrt{2}a_{22}b_1^4 - a_{21}b_1^2 - \frac{2\sqrt{2}a_{22}b_1^4}{5} \right) - \left(2a_{21}b_1^2 - 2\sqrt{2}a_{22}b_1^4 - a_{21}b_1^2 + \frac{2\sqrt{2}a_{22}b_1^4}{5} \right) = \\ &= 4\sqrt{2}a_{22}b_1^4 - \frac{4\sqrt{2}a_{22}b_1^4}{5} = \frac{16\sqrt{2}a_{22}b_1^4}{5}. \end{aligned}$$

□

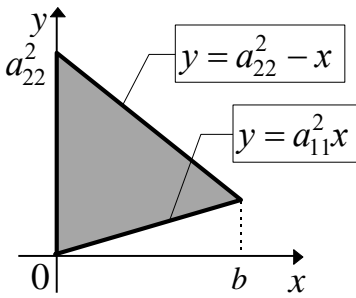
Задача № 4

С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры D , ограниченной кривыми:

1. $y = a_{11}^2 x$, $y = a_{22}^2 - x$, $x = 0$;
2. $y = a_{12}^2 x^2$, $y = |a_{22}|x^2 + a_{23}^2$.

Решение

1. Сделаем чертеж:



По свойству нормировки для двойного интеграла имеем:

$$\mu(D) = \iint_D dx dy.$$

Теперь переходим от двойного интеграла к повторному:

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \iint_D dx dy = \int_0^b dx \int_{a_{11}^2 x}^{a_{22}^2 - x} dy = \int_0^b (a_{22}^2 - x - a_{11}^2 x) dx = \\ &= \left(a_{22}^2 x - \frac{x^2}{2} - a_{11}^2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^b = a_{22}^2 b - \frac{b^2}{2} - a_{11}^2 \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

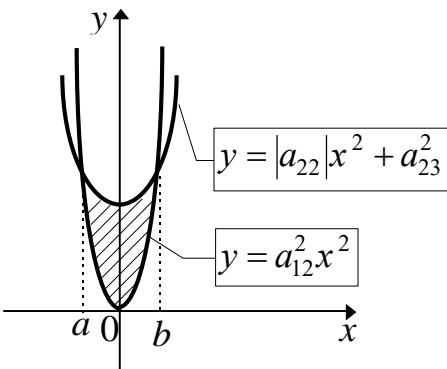
Число b есть абсцисса точки пересечения прямых $y = a_{22}^2 - x$ и $y = a_{11}^2 x$.

Поэтому:

$$\begin{cases} y = a_{22}^2 - x \\ y = a_{11}^2 x \end{cases} \Rightarrow a_{22}^2 - x = a_{11}^2 x \Rightarrow x = \frac{a_{22}^2}{1 + a_{11}^2} = b.$$

Подставляя это значение b в полученное выражение для $\mu(D)$, получаем окончательный результат. □

2. Ввиду того, что во всех вариантах $a_{21}^2 > |a_{22}|$, приблизительный вид данной фигуры D таков:



Действуя так же, как и при решении пункта 1, получаем:

$$\mu(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{a_{12}^2 x^2}^{|a_{22}|x^2 + a_{23}^2} dy =$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b (|a_{22}|x^2 + a_{23}^2 - a_{12}^2 x^2) dx = \left[(|a_{22}| - a_{12}^2) \frac{x^3}{3} + a_{23}^2 x \right]_a^b = \\ &= \left[(|a_{22}| - a_{12}^2) \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) + a_{23}^2 (b - a) \right]. \end{aligned}$$

Числа a и b находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = |a_{22}|x^2 + a_{23}^2 \\ y = a_{12}^2 x^2 \end{cases} \Rightarrow |a_{22}|x^2 + a_{23}^2 = a_{12}^2 x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a_{23}^2}{a_{12}^2 - |a_{22}|} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a_{23}^2}{a_{12}^2 - |a_{22}|}}.$$

Следовательно, $a = -\frac{|a_{23}|}{\sqrt{a_{12}^2 - |a_{22}|}}$, $b = \frac{|a_{23}|}{\sqrt{a_{12}^2 - |a_{22}|}}$. □

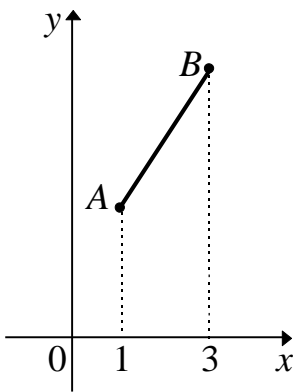
Задача № 5

1. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L \frac{ds}{y + a_{21}x}$, где L – отрезок прямой $y = 100x + a_{22}$ от точки $A(1, 100 + a_{22})$ до точки $B(3, 300 + a_{22})$.

2. Найти центр тяжести дуги цепной линии $L: \begin{cases} x = t \\ y = a \cdot \frac{e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}}{2} \end{cases}$, $-a \leq t \leq a$, где $a = |b_2|$, если ее линейная плотность равна 1.

Решение

1. Сделаем чертеж:



Запишем уравнение отрезка AB в векторном виде:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 100t + a_{22} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq t \leq 3$$

(в качестве параметра t мы просто взяли переменную x).
Вычислим производную вектор-функции $\vec{r}(t)$:

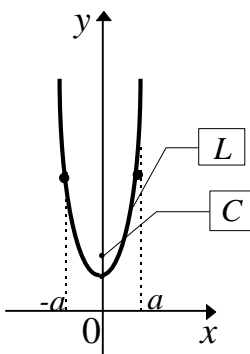
$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу для вычисления криволинейных интегралов 1-го рода, получаем:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{ds}{y + a_{21}x} &= \int_1^3 \frac{\sqrt{1^2 + 100^2}}{100t + a_{22} + a_{21}t} dt = \sqrt{10001} \cdot \int_1^3 \frac{dt}{(100 + a_{21})t + a_{22}} = \\ &= \frac{\sqrt{10001}}{100 + a_{21}} \cdot \ln[(100 + a_{21})t + a_{22}] \Big|_1^3 = \frac{\sqrt{10001}}{100 + a_{21}} \cdot \ln \frac{3(100 + a_{21}) + a_{22}}{(100 + a_{21}) + a_{22}}. \end{aligned}$$

□

2. График цепной линии очень похож на параболу и приблизительно имеет следующий вид:



Сначала вычислим массу m дуги L . Так как

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ a \cdot \frac{e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}}{2} \end{pmatrix},$$

то

$$\bar{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} m &= \int_L ds = \int_{-a}^a |\bar{r}'(t)| dt = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2} dt = \int_{-a}^a \sqrt{\frac{4 + e^{\frac{2t}{a}} - 2 + e^{-\frac{2t}{a}}}{4}} dt = \\ &= \int_{-a}^a \sqrt{\frac{\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right)^2}{4}} dt = \int_{-a}^a \frac{e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}}{2} dt = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{a}{2} \cdot (e - e^{-1} - e^{-1} + e) = \\ &= a(e - e^{-1}). \end{aligned}$$

Теперь вычислим интегралы, входящие в формулу вычисления координат центра тяжести (так как наша кривая – плоская, то в этих формулах следует считать $c_3 = 0$). Имеем:

$$\begin{aligned} \int_L x ds &= \int_{-a}^a t |\bar{r}'(t)| dt = \int_{-a}^a t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2} dt = \\ &= \int_{-a}^0 t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2} dt + \int_0^a t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2} dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных в первом из полученных интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2} dt &= \left| \begin{array}{l} t = -z \Rightarrow dt = -dz \\ t = -a \Rightarrow z = a \\ t = 0 \Rightarrow z = 0 \end{array} \right| = - \int_a^0 (-z) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-\frac{z}{a}} - e^{\frac{z}{a}}}{2} \right)^2} dz = \\ &= - \int_0^a z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}}{2} \right)^2} dz = - \int_0^a t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2} dt \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что $\int_L x ds = 0$, и, следовательно, $c_1 = 0$. Этот факт физически совершенно ясен в силу симметрии данной дуги относительно оси Oy .

Далее, совершая такие же преобразования, которые делались при нахождении массы дуги, получаем:

$$\begin{aligned}\int_L y ds &= \int_{-a}^a t |\bar{r}'(t)| dt = \int_{-a}^a a \frac{e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2} dt = \int_{-a}^a a \left(\frac{e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{a}{4} \cdot \int_{-a}^a \left(e^{\frac{2t}{a}} + 2 + e^{-\frac{2t}{a}} \right) dt = \frac{a^2}{8} e^{\frac{2t}{a}} \Big|_{-a}^a + \frac{a}{2} \cdot t \Big|_{-a}^a - \frac{a^2}{8} e^{-\frac{2t}{a}} \Big|_{-a}^a = \\ &= \frac{a^2}{8} (e^2 - e^{-2}) + \frac{a}{2} (a + a) - \frac{a^2}{8} (e^{-2} - e^2) = \frac{a^2}{4} (e^2 - e^{-2}) + a^2.\end{aligned}$$

Наконец,

$$c_2 = \frac{1}{m} \int_L y ds = \frac{1}{a(e - e^{-1})} \left[\frac{a^2}{4} (e^2 - e^{-2}) + a^2 \right] = \frac{(e + e^{-1})a}{4} + \frac{a}{e - e^{-1}}.$$

Подставляя $a = |b_2|$, нужно вычислить приближенное значение координаты c_2 и нанести точку C в одной системе координат с графиком функции (как это схематически показано на рисунке).

□

Задача №6

1. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

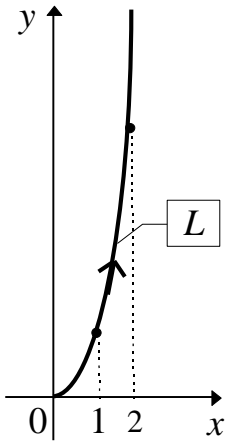
$$\int_L (a_{11}x - a_{12}y) dx + a_{13}xy dy,$$

где L – дуга параболы $y = b_1 x^2$, пробегаемая от точки $A(1, b_1)$ до точки $B(2, 4b_1)$.

2. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma^+} b_1 y dx - b_2 x dy$, где Γ^+ – положительно ориентированный замкнутый контур, составленный из линий $y = b_3 \cdot \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.

Решение

1. Построим чертеж:



Ясно, что параметрические уравнения $L: \begin{cases} x = t \\ y = b_1 t^2 \end{cases}$, $1 \leq t \leq 2$, дают ориентацию, указанную на рисунке. Таким образом,

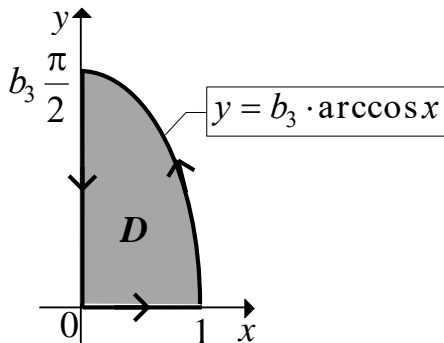
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ b_1 t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2b_1 t \end{pmatrix},$$

получаем:

$$\begin{aligned} \int_L (a_{11}x - a_{12}y)dx + a_{13}xydy &= \int_1^2 (a_{11}t - a_{12}b_1 t^2)dt + a_{13}tb_1 t^2 2b_1 t dt = \\ &= \int_1^2 (a_{11}t - a_{12}b_1 t^2 + 2a_{13}b_1^2 t^4)dt = \left(a_{11} \frac{t^2}{2} - a_{12}b_1 \frac{t^3}{3} + 2a_{13}b_1^2 \frac{t^5}{5} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{a_{11}}{2}(4-1) - \frac{a_{12}b_1}{3}(8-1) + \frac{2a_{13}b_1^2}{5}(32-1) = \frac{3a_{11}}{2} - \frac{7a_{12}b_1}{3} + \frac{62a_{13}b_1^2}{5}. \end{aligned}$$

□

2. Сделаем чертеж:



Положительная ориентация обозначена на рисунке. Ясно, что область D – простой компакт, поэтому формула Грина применима. Согласно этой формуле,

$$\int_{\Gamma^+} b_1 y dx - b_2 x dy = \iint_D \left(\frac{\partial(-b_2 x)}{\partial x} - \frac{\partial(b_1 y)}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$\begin{aligned} &= \iint_D (-b_2 - b_1) dx dy = -(b_2 + b_1) \iint_D dx dy = -(b_2 + b_1) \int_0^1 dx \int_0^{b_3 \cdot \arccos x} dy = \\ &= -(b_2 + b_1) \int_0^1 b_3 \cdot \arccos x dx = -(b_2 + b_1) b_3 \int_0^1 \arccos x dx. \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arccos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos x \Rightarrow du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \\ x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int_1^0 t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_{\Gamma^+} b_1 y dx - b_2 x dy = -(b_1 + b_2) b_3.$$

□

Пояснение

Номер варианта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.
Данные параметров содержатся в следующей таблице:

Таблица данных для вариантов

№ варианта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	1	2	3	-4	3	-6	7	8	9	5	6	7
2	2	8	10	8	9	6	11	12	13	8	9	4
3	3	4	5	-6	7	-8	9	10	12	4	3	2
4	2	3	10	8	5	-3	1	5	7	9	2	4
5	5	6	7	4	6	6	8	7	9	2	4	3
6	4	5	8	-7	3	4	-2	2	3	1	5	6
7	7	9	11	5	8	-9	10	6	10	3	1	-8
8	3	6	9	3	4	1	-4	3	5	-6	7	-1
9	9	10	11	3	2	2	3	4	11	-2	8	5
0	5	8	10	2	3	-5	6	1	3	7	2	9

Часть 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением (кратко д.у.) 1-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Если из уравнения (1) можно выразить y' , то это уравнение лучше записывать в виде

$$y' = f(x, y) \quad (1')$$

или, что то же самое, следующим образом:

$$dy = f(x, y)dx \quad (1'')$$

Решением д.у. (1), а также д.у. (1') и (1''), называется функция $y = y(x)$, которая, будучи подставлена в данные уравнения, превращает эти уравнения в тождества. Общим решением д.у. (1), (1') и (1'') называется функция

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

удовлетворяющая условиям:

а) она является решением д.у. при любом конкретном значении параметра C (этот параметр называется произвольной постоянной);

б) для любой точки (x_0, y_0) найдется такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет соотношению

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0). \quad (*)$$

Нахождение такого $C = C_0$ по условию (*) называется решением задачи Коши с начальными условиями (x_0, y_0) . Найденную таким образом функцию $y = \varphi(x, C_0)$ называют частным решением д.у.

Если, решая д.у. 1-го порядка, мы получаем обычное уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, разрешив которое относительно y можно получить общее решение исходного д.у., то выражение $\Phi(x, y, C) = 0$ называют общим интегралом дифференциального уравнения.

1) **Д.у. с разделяющимися переменными** называется уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (3)$$

которое с помощью дифференциалов часто записывают так:

$$M_1(x) \cdot M_2(y) dx + N_1(x) \cdot N_2(y) dy = 0 \quad (3')$$

(для простоты мы будем предполагать, что функции $N_1(x)$ и $M_2(y)$ не обращаются в нуль).

Разделим переменные:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = - \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy.$$

Последнее уравнение решается взятием интегралов от левой и правой части:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx = - \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy.$$

Произвольная постоянная C появляется после вычисления этих интегралов.

Пример 1. Решим д.у.

$$4ydx - x(y-3)dy = 0.$$

Разделим переменные, поделив обе части уравнения на xy . Получим:

$$\frac{4}{x} dx - \frac{y-3}{y} dy = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} dx = \frac{y-3}{y} dy.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения и вычисляем интегралы:

$$\int \frac{4}{x} dx = \int \frac{y-3}{y} dy \Leftrightarrow 4 \int \frac{dx}{x} = \int dy - 3 \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow 4 \ln|x| + C = y - 3 \ln|y|.$$

Полученное равенство есть общий интеграл исходного уравнения. Заметим, что произвольную постоянную C принято записывать в той стороне д.у. с разделяющимися переменными, в которой находится независимая переменная x .

2) **Однородным д.у.** называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

Для решения этого уравнения вместо переменной y вводят переменную z по формуле $y = z \cdot x$, из которой следует, что $y' = z' \cdot x + z \cdot x' = z' \cdot x + z$. Подставляя все это в уравнение (4), получаем д.у. вида:

$$z' \cdot x + z = f(z) \Leftrightarrow z' \cdot x = f(z) - z.$$

Деля обе части полученного уравнения на x , получаем уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции z .

Пример 2. Решим уравнение

$$x \cdot dy - (y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx = 0.$$

Имеем:

$$x \cdot dy = (y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Полученное уравнение имеет вид (4). Применяя описанную выше замену, получаем:

$$z' \cdot x + z = z + \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow z' \cdot x = \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

В полученном уравнении переменные разделены, поэтому можно брать интегралы от левой и правой частей:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \arcsin z = \ln|x| + C \Leftrightarrow \arcsin \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Последнее выражение есть общий интеграл исходного д.у.

3) **Уравнением Бернулли** называется д.у. вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n. \quad (5)$$

Если $n=0$, то уравнение (5) обычно называют **линейным неоднородным уравнением 1-го порядка**.

Чаще всего уравнение Бернулли решают с помощью факторизации зависимой переменной. А именно, запишем зависимую переменную y в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где

v – это конкретная функция, которую мы будем выбирать так, как нам удобно, а u вводится вместо y (то есть фактически u автоматически получается как $\frac{y}{v}$).

Имеем: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя замены для y и y' в уравнение (5), получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x) \cdot u^n \cdot v^n \Leftrightarrow u' \cdot v + u[v' + p(x) \cdot v] = q(x) \cdot u^n \cdot v^n.$$

Выбираем функцию v таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках $v' + p(x) \cdot v$ обратилось в нуль, то есть решаем относительно v уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x) \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x) dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x) dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x) dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x) dx}.$$

При таком выборе v член, содержащий квадратные скобки, пропадает и уравнение принимает вид:

$$u' \cdot v = q(x) \cdot u^n \cdot v^n \Rightarrow \frac{du}{dx} = q(x) \cdot u^n \cdot v^{n-1} \Rightarrow u^{-n} du = q(x) v^{n-1} dx.$$

Так как v – конкретная функция от x , то мы получили уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции u .

Пример 3. Решим уравнение Бернулли $y' - 2xy = -xy^4$. В соответствии с вышеописанной схемой разобьем решение этого уравнения на несколько этапов.

а) $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' - 2xuv = -xu^4v^4 \Rightarrow u'v + u[v' - 2xv] = -xu^4v^4$.

б) $v' - 2xv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2x dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 2 \int x dx \Rightarrow \ln|v| = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}$.

Заметим, что при вычислении v мы не учитываем произвольную постоянную, так как согласно общей методике достаточно иметь одну функцию v , обращающую в нуль квадратные скобки.

в) $u' \cdot e^{x^2} = -xu^4 e^{4x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -xu^4 e^{3x^2} \Rightarrow u^{-4} du = -x e^{3x^2} dx \Rightarrow \int u^{-4} du = -\int x e^{3x^2} dx$.

Вычислим второй интеграл:

$$\int x e^{3x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x^2, \\ dt = 6x dx \rightarrow x dx = \frac{1}{6} dt \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int e^t dt = \frac{e^t}{6} + C = \frac{e^{3x^2}}{6} + C.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{u^{-3}}{-3} = -\frac{e^{3x^2}}{6} - C \Rightarrow \frac{1}{u^3} = \frac{e^{3x^2}}{2} + 3C \Rightarrow u^3 = \frac{2}{e^{3x^2} + 6C} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{2}{e^{3x^2} + 6C}}.$$

г) Общее решение имеет вид: $y = e^{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{e^{3x^2} + 6C}}$.

Пример 4. Решим уравнение $y' + y = (\cos x - \sin x)y^2$. Это также уравнение Бернулли.

а) $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + uv = (\cos x - \sin x)u^2v^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow u'v + u[v' + v] = (\cos x - \sin x)u^2v^2$.

б) $v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \Rightarrow \ln|v| = -x \Rightarrow v = e^{-x}$.

в) $u' e^{-x} = (\cos x - \sin x)u^2 e^{-2x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = (\cos x - \sin x)u^2 e^{-x} \Rightarrow u^{-2} du = (\cos x - \sin x)e^{-x} dx \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int u^{-2} du = \int \cos x \cdot e^{-x} dx - \int \sin x \cdot e^{-x} dx$.

К интегралу с косинусом применим формулу интегрирования по частям:

$$\int \cos x \cdot e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} U = e^{-x} \rightarrow dU = -e^{-x} dx \\ dV = \cos x dx \rightarrow V = \sin x \end{array} \right| = e^{-x} \sin x + \int \sin x \cdot e^{-x} dx.$$

Таким образом,

$$\frac{u^{-1}}{-1} = e^{-x} \sin x + \int \sin x \cdot e^{-x} dx - \int \sin x \cdot e^{-x} dx = e^{-x} \sin x + C \Rightarrow \frac{1}{u} = -e^{-x} \sin x - C \Rightarrow u = -\frac{1}{e^{-x} \sin x + C}.$$

$$\Gamma) y = uv = -\frac{e^{-x}}{e^{-x} \sin x + C} = -\frac{1}{\sin x + C \cdot e^x}.$$

ЗАДАЧА № 1

$$1. y' = e^{a_{11}x + a_{12}y}.$$

$$2. y' = \frac{b_1 xy}{b_2^2 x^2 + b_3^2 y^2}.$$

$$3. a_{11}xy' + a_{12}y = x \cdot \cos(a_{13}x) \text{ (при } x > 0 \text{)}.$$

$$4. a_{21}xy' + a_{22}y = -a_{11}xy^2 \text{ (при } x > 0 \text{)}.$$

План решения

$$1. \frac{dy}{e^{a_{12}y}} = e^{a_{11}x} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^{a_{12}y}} = \int e^{a_{11}x} dx + C \Rightarrow \int e^{-a_{12}y} dy = \int e^{a_{11}x} dx + C.$$

Закончить самостоятельно.

2. После замены $y = z \cdot x$, $y' = z' \cdot x + z$ имеем:

$$\begin{aligned} z'x + z &= \frac{b_1 z}{b_2^2 + b_3^2 z^2} \Rightarrow z'x = \frac{b_1 z - b_2^2 z - b_3^2 z^3}{b_2^2 + b_3^2 z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{b_1 z - b_2^2 z - b_3^2 z^3}{b_2^2 + b_3^2 z^2} \Rightarrow \frac{b_2^2 + b_3^2 z^2}{b_1 z - b_2^2 z - b_3^2 z^3} dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{b_2^2 + b_3^2 z^2}{b_1 z - b_2^2 z - b_3^2 z^3} dz = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{b_2^2 + b_3^2 z^2}{b_1 z - b_2^2 z - b_3^2 z^3} dz = \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Интеграл слева вычислить самостоятельно.

$$3. y' + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \cos(a_{13}x).$$

Получили линейное неоднородное уравнение 1-го порядка, где

$p(x) = \frac{a_{12}}{a_{11}x}$, $q(x) = \frac{\cos(a_{13}x)}{a_{11}}$. Применим схему поэтапного решения, изложенную в примерах 3 и 4.

$$a) y = u \cdot v, y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + \frac{a_{12}}{a_{11}x} \cdot uv = \frac{\cos(a_{13}x)}{a_{11}} \Rightarrow u'v + u \left[v' + \frac{a_{12}}{a_{11}x} v \right] = \frac{\cos(a_{13}x)}{a_{11}}.$$

$$\begin{aligned} б) v' + \frac{a_{12}}{a_{11}x} v &= 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{a_{12}}{a_{11}x} v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{a_{12} dx}{a_{11}x} \Rightarrow \ln|v| = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \ln x \Rightarrow \ln|v| = \ln x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}}. \end{aligned}$$

$$в) u'x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}} = \frac{\cos(a_{13}x)}{a_{11}} \Rightarrow du = \frac{1}{a_{11}} \cdot x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}} \cos(a_{13}x) dx \Rightarrow u = \frac{1}{a_{11}} \int x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}} \cos(a_{13}x) dx.$$

г) $y = x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}} \cdot \frac{1}{a_{11}} \int x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}} \cos(a_{13}x) dx$ – это общее решение данного д.у. Произвольная постоянная неявно входит в неопределенный интеграл, оставшийся невычисленным. Доведите до конца все необходимые выкладки!

4. $y' + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{x} y = -\frac{a_{11}}{a_{21}} y^2$ – это уравнение Бернулли.

$$\begin{aligned} \text{а) } y=uv, y' &= u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{x} \cdot uv = -\frac{a_{11}}{a_{21}} u^2 v^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u'v + u \left[v' + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{x} v \right] = -\frac{a_{11}}{a_{21}} u^2 v^2. \end{aligned}$$

$$\text{б) } v' + \frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{x} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{x} v \Rightarrow \ln|v| = -\frac{a_{22}}{a_{21}} \cdot \ln x \Rightarrow v = x^{-\frac{a_{22}}{a_{21}}}.$$

$$\text{в) } u' x^{-\frac{a_{22}}{a_{21}}} = -\frac{a_{11}}{a_{21}} u^2 x^{-\frac{2a_{22}}{a_{21}}} \Rightarrow u^{-2} du = -\frac{a_{11}}{a_{21}} x^{-\frac{a_{22}}{a_{21}}} dx \Rightarrow \int u^{-2} du = -\frac{a_{11}}{a_{21}} \int x^{-\frac{a_{22}}{a_{21}}} dx$$

Далее по той же схеме, что и в предыдущем примере (закончить самостоятельно).

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Общий вид д.у. 2-го порядка таков:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (6)$$

Если из уравнения (6) можно выразить y'' , то это уравнение записывают в виде:

$$y'' = f(x, y, y') \quad (6')$$

Решением д.у. (6) или (6') называется функция $y=y(x)$, которая, будучи подставлена в данные уравнения, превращает эти уравнения в тождества. Общим решением д.у. (6) или (6') называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \quad (7)$$

удовлетворяющая условиям:

а) она является решением д.у. при любых конкретных значениях параметров C_1 и C_2 (эти параметры называются произвольными постоянными);

б) для любой точки (x_0, y_0, y'_0) найдутся такие значения $C_1 = C_1^{(0)}$ и $C_2 = C_2^{(0)}$, что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}). \end{cases} \quad (**)$$

Нахождение таких $C_1 = C_1^{(0)}$ и $C_2 = C_2^{(0)}$ из соотношений (**) называется решением задачи Коши с начальными условиями (x_0, y_0, y'_0) . Найденную таким образом функцию $y = \varphi(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)})$ называют частным решением д.у.

Если, решая д.у. 2-го порядка, мы получаем обычное уравнение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, разрешив которое относительно y можно получить общее решение исходного д.у., то выражение $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ называют общим интегралом этого дифференциального уравнения.

Рассмотрим сначала **д.у. 2-го порядка, допускающие понижение порядка.**

1) Пусть правая часть уравнения (6') зависит только от x , то есть уравнение имеет вид:

$$y'' = f(x). \quad (8)$$

Тогда

$$y' = \int f(x) dx = \varphi_1(x) + C_1, \quad y = \int \varphi_1(x) dx + C_1 x = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2.$$

2) Пусть левая часть уравнения (6) не зависит от y , то есть уравнение имеет вид:

$$F(x, y', y'') = 0. \quad (9)$$

Если сделать замену $y' = z(x)$, то $y'' = z'(x)$, и мы приходим к уравнению 1-го порядка $F(x, z, z') = 0$, которое иногда может быть решено одним из приемов, описанных выше. Найдя z , из соотношения $y' = z$ находим y .

3) Пусть левая часть уравнения (6) не зависит от x , то есть уравнение имеет вид:

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (10)$$

Если сделать замену $y' = z(y)$, то по правилу дифференцирования сложной функции $y'' = z'(y) \cdot y'(x) = z' \cdot z$, и мы приходим к уравнению 1-го порядка $F(y, z, z' \cdot z) = 0$, в котором независимой переменной следует считать переменную y , а искомая функция z зависит от y . Это уравнение иногда может быть решено одним из приемов, описанных выше. Найдя z , из соотношения $y' = z(y)$ находим y .

ЗАДАЧА № 2

1. $y'' = \sin(a_{11}x) + \cos(a_{12}x) + a_{13}x$.
2. $a_{11}x^3 y'' + a_{12}x^2 y' = a_{22}$ (при $x > 0$).
3. $a_{31}y y'' = a_{32} + a_{33}(y')^2$.

План решения

1. Это уравнения вида (8), поэтому

$$\begin{aligned} y' &= \int (\sin(a_{11}x) + \cos(a_{12}x) + a_{13}x) dx = -\frac{1}{a_{11}} \cos(a_{11}x) + \frac{1}{a_{12}} \sin(a_{12}x) + a_{13} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \int \left(-\frac{1}{a_{11}} \cos(a_{11}x) + \frac{1}{a_{12}} \sin(a_{12}x) + a_{13} \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Закончить самостоятельно.

2. Нетрудно усмотреть, что данное уравнение есть д.у. типа (9). Следуя схеме решения,

$$y' = z, \quad y'' = z' \Rightarrow a_{11}x^3 z' + a_{12}x^2 z = a_{22} \Rightarrow z' + \frac{a_{12}}{a_{11}x} z = \frac{a_{22}}{a_{11}} x^{-3}.$$

Полученное уравнение есть линейное неоднородное уравнение 1-го порядка. Решаем его обычным образом.

$$а) z=uv, z'=u'v+uv' \Rightarrow u'v+uv'+\frac{a_{12}}{a_{11}x} \cdot uv=\frac{a_{22}}{a_{11}}x^{-3} \Rightarrow u'v+u\left[v'+\frac{a_{12}}{a_{11}x}v\right]=\frac{a_{22}}{a_{11}}x^{-3}.$$

$$б) v'+\frac{a_{12}}{a_{11}x}v=0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-\frac{a_{12}}{a_{11}x}v \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v}=-\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot \ln x \Rightarrow \\ \Rightarrow v=x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}}.$$

$$в) u'x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}}=\frac{a_{22}}{a_{11}}x^{-3} \Rightarrow du=\frac{a_{22}}{a_{11}}x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}-3}dx \Rightarrow u=\int \frac{a_{22}}{a_{11}}x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}-3}dx=\frac{a_{22}}{a_{11}} \cdot \frac{x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}-2}}{\frac{a_{12}}{a_{11}}-2}+C_1=\frac{a_{22}x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}-2}}{a_{12}-2a_{11}}+C_1.$$

$$г) z=uv=x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}}\left(\frac{a_{22}x^{\frac{a_{12}}{a_{11}}-2}}{a_{12}-2a_{11}}+C_1\right)=\frac{a_{22}x^{-2}}{a_{12}-2a_{11}}+C_1x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}}.$$

Теперь подставляем найденную функцию z в равенство $y'=z$:

$$y'=\frac{a_{22}x^{-2}}{a_{12}-2a_{11}}+C_1x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}} \Rightarrow y=\int \left(\frac{a_{22}x^{-2}}{a_{12}-2a_{11}}+C_1x^{-\frac{a_{12}}{a_{11}}}\right)dx=\frac{a_{22}}{(2a_{11}-a_{12}) \cdot x}+C_1 \cdot \frac{x^{1-\frac{a_{12}}{a_{11}}}}{1-\frac{a_{12}}{a_{11}}}+C_2.$$

3. Данное уравнение есть д.у. типа (10). Имеем:

$$y'=z; y''=z' \cdot z \Rightarrow a_{31}y \frac{dz}{dy}z=a_{32}+a_{33} \cdot z^2 \Rightarrow \frac{zdz}{a_{32}+a_{33}z^2}=\frac{dy}{a_{31}y}; \Rightarrow \int \frac{zdz}{a_{32}+a_{33}z^2}=\int \frac{dy}{a_{31}y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2a_{33}}\ln|a_{32}+a_{33}z^2|=\frac{1}{a_{31}}\ln y+\ln C_1 \Rightarrow \ln|a_{32}+a_{33}z^2|=\ln\left(y^{\frac{2a_{33}}{a_{31}}} \cdot C_1^{2a_{33}}\right) \Rightarrow a_{32}+a_{33}z^2=y^{\frac{2a_{33}}{a_{31}}} \cdot C_1^{2a_{33}} \Rightarrow \\ \Rightarrow z^2=\frac{1}{a_{33}}\left(y^{\frac{2a_{33}}{a_{31}}} \cdot C_1^{2a_{33}}-a_{32}\right) \Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\left(y^{\frac{2a_{33}}{a_{31}}} \cdot C_1^{2a_{33}}-a_{32}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая, что $y'=z$, получаем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\left(y^{\frac{2a_{33}}{a_{31}}} \cdot C_1^{2a_{33}}-a_{32}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^{\frac{2a_{33}}{a_{31}}} \cdot C_1^{2a_{33}}-a_{32}}}=\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y^{\frac{2a_{33}}{a_{31}}} \cdot C_1^{2a_{33}}-a_{32}}}=\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}x+C_2.$$

Остальное вычислить самостоятельно.

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Общий вид линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами таков:

$$y''+py'+qy=0, \quad (11)$$

где p и q – некоторые действительные числа. **Характеристическим уравнением** д.у. (11) называется квадратное уравнение относительно параметра λ , получающееся из уравнения (11) формальной заменой y'' на λ^2 , y' на λ и y на 1. Таким образом, характеристическое уравнение дифференциального уравнения (11) имеет вид:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (12)$$

Пусть λ_1, λ_2 – корни уравнения (12). Возможны три случая:

- а) корни действительны и различны, то есть $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- б) корни действительные совпадающие, то есть $\lambda_1 = \lambda_2$;
- в) корни комплексные, сопряженные, то есть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Вид общего решения y_{00} д.у. (11) в каждом из этих случаев запишем в следующую таблицу:

Таблица 1

Случай	Общее решение y_{00} д.у. (11)
а)	$y_{00} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$
б)	$y_{00} = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 \cdot x)$
в)	$y_{00} = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$

ЗАДАЧА № 3

1. $y'' - 4a_{11}y' + 3a_{11}^2 y = 0$;
2. $y'' + 2a_{22}y' + a_{22}^2 y = 0$;
3. $y'' + a_{21}y' = 0$;
4. $y'' + a_{33}^2 y = 0$.

План решения состоит в составлении характеристических уравнений, вычислении их корней и записи решений д.у. с помощью таблицы.

1. $\lambda^2 - 4a_{11}\lambda + 3a_{11}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3a_{11}, \lambda_2 = a_{11} \Rightarrow y_{00} = C_1 \cdot e^{3a_{11}x} + C_2 \cdot e^{a_{11}x}$.
2. $\lambda^2 + 2a_{22}\lambda + a_{22}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -a_{22} \Rightarrow y_{00} = e^{-a_{22}x} (C_1 + C_2 \cdot x)$.
3. $\lambda^2 + a_{21}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -a_{21} \Rightarrow y_{00} = C_1 + C_2 \cdot e^{-a_{21}x}$.
4. $\lambda'' + a_{33}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm a_{33}i \Rightarrow y_{00} = C_1 \cdot \sin(a_{33}x) + C_2 \cdot \cos(a_{33}x)$.

Обозначение y_{00} означает, что найдено общее решение однородного д.у.

В следующих примерах найти частные решения однородных уравнений $y_{\text{чо}}$, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

5. $y'' - 3a_{12}y' + 2a_{12}^2 y = 0, y(1) = b_1, y'(1) = b_2$;

6. $y'' - a_{22}^2 y = 0, \quad y(0) = b_2, \quad y'(0) = b_3.$

План решения состоит в нахождении y_{00} , записи системы уравнений для нахождения конкретных значений параметров C_1, C_2 и получения $y_{\text{чо}}$ подстановкой этих значений в y_{00} .

5. Находим y_{00} , а затем y'_{00} :

$\lambda^2 - 3a_{12}\lambda + 2a_{12}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a_{12}, \lambda_2 = 2a_{12} \Rightarrow y_{00} = C_1 \cdot e^{a_{12}x} + C_2 \cdot e^{2a_{12}x} \Rightarrow y'_{00} = C_1 \cdot a_{12}e^{a_{12}x} + C_2 \cdot 2a_{12}e^{2a_{12}x}.$
Реализуем начальные условия, подставляя в y_{00} и y'_{00} вместо x единицу и приравнивая полученные выражения соответственно b_1 и b_2 :

$$\begin{cases} C_1 e^{a_{12}} + C_2 e^{2a_{12}} = b_1; \\ C_1 a_{12} e^{a_{12}} + C_2 \cdot 2a_{12} e^{2a_{12}} = b_2. \end{cases}$$

Решим эту систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с помощью правила Крамера. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{a_{12}} & e^{2a_{12}} \\ a_{12}e^{a_{12}} & 2a_{12}e^{2a_{12}} \end{vmatrix} = a_{12}e^{3a_{12}} \neq 0, \text{ так как во всех вариантах } a_{12} \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & e^{2a_{12}} \\ b_2 & 2a_{12}e^{2a_{12}} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{a_{12}} & b_1 \\ a_{12}e^{a_{12}} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Вычислив все эти определители, находим $C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$ Таким образом,

$$y_{\text{чо}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot e^{a_{12}} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \cdot e^{2a_{12}}.$$

6. $\lambda^2 - a_{22}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a_{22}, \lambda_2 = -a_{22} \Rightarrow y_{00} = C_1 \cdot e^{a_{22}x} + C_2 \cdot e^{-a_{22}x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow y'_{00} = C_1 \cdot a_{22}e^{a_{22}x} - C_2 \cdot a_{22}e^{-a_{22}x}.$

Получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = b_2 \\ C_1 a_{22} - C_2 a_{22} = b_3. \end{cases}$$

Так же, как и в предыдущем примере, находим $\Delta, \Delta_1, \Delta_2,$ вычисляем C_1 и C_2 и получаем $y_{\text{чо}}.$

Требуется довести до конца решения примеров из пунктов 5 и 6.

4. НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СЛУЧАЙ СТАНДАРТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Общий вид *линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами* таков:

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (13)$$

где p и q – некоторые действительные числа. Здесь мы ограничиваемся случаем, когда

$$f(x) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + Q_n(x) \sin bx], \quad (14)$$

где a и b – действительные числа, а $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены соответственно m -ой и n -ой степени. В этом случае общее решение $y_{\text{он}}$ д.у. (13) получается как сумма общего решения y_{00} д.у. (11) и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ д.у. (13), то есть

$$y_{\text{он}} = y_{00} + y_{\text{чн}}. \quad (15)$$

Покажем, как находить $y_{\text{чн}}$, когда $f(x)$ имеет вид (14). Исходя из конкретного вида (14), составляется число $a+ib$. Далее ставится вопрос: является ли $a+ib$ корнем характеристического уравнения (12). Здесь возможны 3 случая, для каждого из которых строится $y_{\text{чн}}$. Объединим эти случаи в таблицу:

Таблица 2

Число $a+ib$	Вид $y_{\text{чн}}$
1. Не является корнем характеристического уравнения	$y_{\text{чн}} = e^{ax} [\tilde{P}_k(x) \cos bx + \tilde{Q}_k(x) \sin bx]$
2. Является корнем характеристического уравнения кратности 1	$y_{\text{чн}} = x e^{ax} [\tilde{P}_k(x) \cos bx + \tilde{Q}_k(x) \sin bx]$
3. Является корнем характеристического уравнения кратности 2	$y_{\text{чн}} = x^2 e^{ax} [\tilde{P}_k(x) \cos bx + \tilde{Q}_k(x) \sin bx]$

Здесь $\tilde{P}_k(x)$, $\tilde{Q}_k(x)$ – многочлены степени k , где $k = \max(m, n)$. Коэффициенты этих многочленов находятся методом неопределенных коэффициентов, как это делается в следующем примере.

Пример 5. Решим уравнение $y'' - 4y = x - 1$. Находим сначала y_{00} :

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_{00} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}.$$

Составляем $a+ib$. Так как здесь $a=0$ и $b=0$, то $a+ib=0$. Число 0 не является корнем характеристического уравнения, т. е. это 1-й случай таблицы 2. Следовательно, $y_{\text{чн}} = Ax + B$, где A и B – пока неизвестные коэффициенты. Найдем их. Подставим $y_{\text{чн}}$ в исходное уравнение. Так как $y'_{\text{чн}} = A$ и $y''_{\text{чн}} = 0$, то $-4(Ax + B) = x - 1$. Приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x (в этом и заключается метод неопределенных коэффициентов):

$$\begin{cases} x & \begin{cases} -4A = 1 \\ -4B = -1 \end{cases} \\ x^0 & \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}; B = \frac{1}{4}.$$

Итак, $y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

Теперь, руководствуясь формулой (15), получаем:

$$y_{\text{он}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

ЗАДАЧА № 4

1. $y'' + 4a_{11}y' + 4a_{11}^2y = a_{22}e^{-2a_{11}x}$;
2. $y'' - 2a_{12}y' + a_{12}^2y = a_{13}x + a_{23}$;
3. $y'' + a_{13}y' = a_{23}\cos(a_{33}x)$.

План решения

1. Находим сначала y_{00} :

$$\lambda^2 + 4a_{11}\lambda + 4a_{11}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2a_{11} \Rightarrow y_{00} = e^{-2a_{11}x} (C_1 + C_2x).$$

Так как $a + ib = -2a_{11}$, а это число является двукратным корнем характеристического уравнения, то для нахождения $y_{\text{чн}}$ мы должны применить случай 3 таблицы 2, то есть

$$y_{\text{чн}} = Ax^2 e^{-2a_{11}x}. \quad (16)$$

Подставим (16) в исходное уравнение:

$$(2Ae^{-2a_{11}x} - 8Aa_{11}xe^{-2a_{11}x} + 4Aa_{11}^2x^2e^{-2a_{11}x}) + 4a_{11}(2Axe^{-2a_{11}x} - 2Aa_{11}x^2e^{-2a_{11}x}) + 4a_{11}^2Ax^2e^{-2a_{11}x} = a_{22}e^{-2a_{11}x}.$$

После преобразований получаем:

$$2Ae^{-2a_{11}x} = a_{22}e^{-2a_{11}x} \Leftrightarrow A = \frac{a_{22}}{2}.$$

Поэтому $y_{\text{чн}} = \frac{a_{22}x^2 e^{-2a_{11}x}}{2}$ и $y_{\text{он}} = y_{00} + y_{\text{чн}} = e^{-2a_{11}x} (C_1 + C_2x) + \frac{a_{22}x^2 e^{-2a_{11}x}}{2}.$

2. Находим y_{00} :

$$\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{12}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = a_{12} \Rightarrow y_{00} = e^{a_{12}x} (C_1 + C_2x).$$

Так как $a + ib = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то для нахождения $y_{\text{чн}}$ мы должны применить случай 1 таблицы 2, то есть

$$y_{\text{чн}} = Ax + B, \quad (17)$$

Подставим (17) в исходное уравнение:

$$-2a_{12}A + a_{12}^2(Ax + B) = a_{13}x + a_{23} \Leftrightarrow Aa_{12}^2x + (-2a_{12}A + a_{12}^2B) = a_{13}x + a_{23}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , находим A и B , а, следовательно, и $y_{\text{чн}}$. Затем находим $y_{\text{он}}$.

Довести решение до конца! Заметим, что решение этого пункта полностью аналогично решению разобранных примера 5.

3. Имеем:

$$\lambda^2 + a_{13}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -a_{13} \Rightarrow y_{00} = C_1 + C_2 \cdot e^{-a_{13}x}.$$

Т.к. $a + ib = a_{33}i$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_{\text{чн}} = A \cdot \cos(a_{33}x) + B \cdot \sin(a_{33}x) \quad (18)$$

Подставим (18) в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} &(-Aa_{33}^2 \cos(a_{33}x) - Ba_{33}^2 \sin(a_{33}x)) + a_{13}(-Aa_{33} \sin(a_{33}x) + Ba_{33} \cos(a_{33}x)) = a_{23} \cos(a_{33}x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-Aa_{13}a_{33} - Ba_{33}^2) \sin(a_{33}x) + (-Aa_{33}^2 + Ba_{13}a_{33}) \cos(a_{33}x) = a_{23} \cos(a_{33}x). \end{aligned}$$

Сначала приравняем коэффициенты, стоящие в левой и правой частях перед функцией $\sin(a_{33}x)$, а затем делаем то же самое с коэффициентами, стоящими перед функцией $\cos(a_{33}x)$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -Aa_{13}a_{33}-Ba_{33}^2=0 \\ -Aa_{33}^2+Ba_{13}a_{33}=a_{23} \end{cases}.$$

Вычисляем главный определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} -a_{13}a_{33} & -a_{33}^2 \\ -a_{33}^2 & a_{13}a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}^2a_{33}^2 - a_{33}^4 = -a_{33}^2(a_{13}^2 + a_{33}^2).$

Данные всех вариантов обеспечивают неравенство нулю этого определителя. Поэтому правило Крамера применимо. Подсчитаем вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a_{33}^2 \\ a_{23} & a_{13}a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{33}^2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -a_{13}a_{33} & 0 \\ -a_{33}^2 & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{33}a_{23}.$$

Получаем: $A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{a_{23}}{a_{13}^2 + a_{33}^2}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}(a_{13}^2 + a_{33}^2)}.$ Таким образом,

$$y_{\text{чн}} = -\frac{a_{23}}{a_{13}^2 + a_{33}^2} \cdot \cos(a_{33}x) + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}(a_{13}^2 + a_{33}^2)} \cdot \sin(a_{33}x)$$

и

$$y_{\text{он}} = C_1 + C_2 \cdot e^{-a_{13}x} - \frac{a_{23}}{a_{13}^2 + a_{33}^2} \cdot \cos(a_{33}x) + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}(a_{13}^2 + a_{33}^2)} \cdot \sin(a_{33}x).$$

ПОЯСНЕНИЕ

Номер варианта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.

№ варианта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	1	1	3	4	5	-6	18	-8	9	5	-6	7
2	2	2	9	8	-7	6	26	12	13	8	9	4
3	3	3	5	6	7	-8	12	10	6	4	-3	2
4	2	2	10	8	-6	-3	14	5	7	9	2	4
5	5	5	3	4	-2	6	18	7	9	2	4	3
6	6	6	1	7	3	4	6	2	3	1	5	6
7	7	7	4	5	8	-9	8	6	4	3	1	-8
8	8	8	2	3	4	1	10	3	5	-6	7	-1
9	9	9	8	1	-1	2	4	4	2	-2	8	5
0	10	10	7	2	9	-5	4	1	2	7	2	9

ЧАСТЬ 6

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in R$ называется **сходящимся** $\Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$, где

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ — **частичная сумма** ряда, а u_n — **общий член ряда**.

В остальных случаях ряд называется **расходящимся**, и основная задача раздела — установить, является ли данный числовой ряд сходящимся или расходящимся на основании изложенных ниже признаков сходимости и других фактов.

Необходимое условие сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Достаточный признак расходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

Свойства сходящихся рядов: 1) Сумма сходящихся рядов есть сходящийся ряд
2) Умножение ряда на числовой коэффициент не влияет на его сходимость
3) Если отбросить любое количество первых членов ряда, его сходимость не изменится

Положительные числовые ряды

Интегральный признак Коши: $\int_N^{\infty} a_n dn = \begin{cases} < \infty \Rightarrow (1) \text{ сходится} \\ \infty \Rightarrow (1) \text{ расходится} \end{cases}$

Радикальный признак Коши: $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} < 1 \Rightarrow (1) \text{ сходится} \\ > 1 \Rightarrow (1) \text{ расходится} \\ 1 \Rightarrow ? \end{cases}$

Признак Даламбера: $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} < 1 \Rightarrow (1) \text{ сходится} \\ > 1 \Rightarrow (1) \text{ расходится} \\ 1 \Rightarrow ? \end{cases}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0 \forall n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0 \forall n$

Признак эквивалентности: $a_n \sim b_n \Rightarrow (1)$ и (2) одновременно сходятся или расходятся

Признак сравнения: $a_n < b_n \forall n > N$, (1) расходится \Rightarrow (2) расходится,
(2) сходится \Rightarrow (1) сходится.

СТАНДАРТНЫЕ РЯДЫ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ — **p-гармонический** ряд,

при $p > 1$ сходится,
при $p \leq 1$ расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ — **геометрическая прогрессия**,

при $|q| < 1$ сходится,
при $|q| \geq 1$ расходится.

ЗАДАЧА №1

Для следующих рядов проверить выполнение необходимого условия сходимости:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{11}n+a_{12}}{a_{21}n+a_{22}}$.	2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{13}n+a_{23}}{ a_{33} ^n}$.	3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a_{11}^2)^n}{(n+1)!}$.	4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+a_{31}}{a_{32}n^2+a_{33}n}$.
--	--	---	---

Решение

1. Так как общий член $u_n = \frac{a_{11}n+a_{12}}{a_{21}n+a_{22}}$, то, применяя эквивалентности

$a_{11}n+a_{12} \sim a_{11}n$ и $a_{21}n+a_{22} \sim a_{21}n$, справедливые при $n \rightarrow \infty$, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{11}n+a_{12}}{a_{21}n+a_{22}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{11}n}{a_{21}n} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq 0,$$

так как во всех вариантах $a_{11} \neq 0$ и $a_{21} \neq 0$. Поэтому данный ряд расходится.

2. Сначала запишем эквивалентность: $u_n = \frac{a_{13}n+a_{23}}{|a_{33}|^n} \sim \frac{a_{13}n}{|a_{33}|^n}$. Во всех

вариантах $a_{13} \neq 0$ и $|a_{33}| > 1$. Из теории пределов известно, что $n \ll |a_{33}|^n$ (то есть когда $n \rightarrow \infty$ показательная функция есть бесконечно большая более высокого порядка, чем степенная функция). Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{13}n}{|a_{33}|^n} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется, но сделать вывод о сходимости либо расходимости ряда нельзя.

3. Прежде всего отметим, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Из теории пределов известно, что $(a_{11}^2)^n \ll n!$ (когда $n \rightarrow \infty$ $n!$ есть бесконечно большая более высокого порядка, чем показательная функция). Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(a_{11}^2)^n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(a_{11}^2)^n}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{11}^2)^n}{n!} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется, но сделать вывод о сходимости либо расходимости ряда нельзя.

4. Применяя эквивалентности $n\sqrt{n}+a_{31} \sim n\sqrt{n}$ и $a_{32}n^2+a_{33}n \sim a_{32}n^2$, справедливые при $n \rightarrow \infty$, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}+a_{31}}{a_{32}n^2+a_{33}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{a_{32}n^2} = \frac{1}{a_{32}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется, но сделать вывод о сходимости либо расходимости ряда нельзя.

ЗАДАЧА №2

Исследовать положительные ряды с помощью признаков сходимости:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{11}n+a_{12}}{\sqrt{n} \cdot (a_{21}n^2+a_{22})}$.	2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{31}n^2+a_{32}}{(a_{33}^2)^n}$.	3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{11}^2)^n+a_{12}}{n!}$.	4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_{13}n+a_{23})\ln(a_{13}n+a_{23})}$.
---	--	---	--

Решение

1. Применим признак эквивалентности. Применяя эквивалентность $a_{11}n+a_{12} \sim a_{11}n$ и $a_{21}n^2+a_{22} \sim a_{21}n^2$, справедливые при $n \rightarrow \infty$, получаем:

$$a_n = \frac{a_{11}n+a_{12}}{\sqrt{n}(a_{21}n^2+a_{22})} \sim \frac{a_{11}n}{a_{21}n^{\frac{5}{2}}} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = b_n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ является p -гармоническим с $p = \frac{3}{2} > 1$. Поэтому он сходится. Тогда следует, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{a_{11}}{a_{21}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ также сходится. Таким образом, исходный ряд сходится по признаку эквивалентности.

2. Запишем эквивалентность: $a_n = \frac{a_{31}n^2+a_{32}}{(a_{33}^2)^n} \sim \frac{a_{31}n^2}{(a_{33}^2)^n} = b_n$. К ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

применим признак Даламбера (см. теорему 4). Так как $b_{n+1} = \frac{a_{31}(n+1)^2}{(a_{33}^2)^{n+1}}$, то

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{31}(n+1)^2 \cdot (a_{33}^2)^n}{(a_{33}^2)^{n+1} \cdot (a_{31}n^2)} = \frac{1}{a_{33}^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{a_{33}^2} < 1,$$

так как во всех вариантах $a_{33}^2 > 1$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Даламбера. Значит исходный ряд также сходится по признаку эквивалентности.

3. Запишем эквивалентность: $a_n = \frac{(a_{11}^2)^n+a_{12}}{n!} \sim \frac{(a_{11}^2)^n}{n!} = b_n$. К ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

применим признак Даламбера (см. теорему 4). Так как $b_{n+1} = \frac{(a_{11}^2)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(a_{11}^2)^n \cdot a_{11}^2}{(n+1) \cdot n!}$, то

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{11}^2)^n \cdot a_{11}^2 \cdot n!}{(a_{11}^2)^n \cdot (n+1) \cdot n!} = a_{11}^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Даламбера. Значит исходный ряд также сходится по признаку эквивалентности.

4. Так как $a_n = \frac{1}{(a_{13}n+a_{23})\ln(a_{13}n+a_{23})} \downarrow 0$, то можно применить интегральный признак Коши. Имеем:

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{(a_{13}n+a_{23})\ln(a_{13}n+a_{23})} = \left| \begin{array}{l} t = \ln(a_{13}n+a_{23}), dt = \frac{a_{13}}{a_{13}n+a_{23}} dn \Rightarrow \frac{dn}{a_{13}n+a_{23}} = \frac{dt}{a_{13}} \\ n=1 \rightarrow t = \ln(a_{13}+a_{23}), n=\infty \rightarrow t=\infty \end{array} \right| = \frac{1}{a_{13}} \cdot \int_{\ln(a_{13}+a_{23})}^{\infty} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{a_{13}} \cdot \ln t \Big|_{\ln(a_{13}+a_{23})}^{\infty} = \infty.$$

Ряд расходится по интегральному признаку Коши.

Знакопередающиеся ряды

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n$$

1) Если сходится ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд (3) сходится абсолютно.

2) Если ряд из модулей расходится, нужно проверить выполнения условий

признака Лейбница: $\begin{cases} 1) a_n > a_{n+1} \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases}$. При выполнении этих условий ряд (3) сходится условно, в противном случае (3) расходится.

ЗАДАЧА №3

Следующие ряды исследовать на абсолютную и условную сходимость:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_{11}n + a_{12}}{a_{23}n^2 + a_{13}n}.$	2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a_{13}n + a_{23}) \ln(a_{13}n + a_{23})}.$	3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (a_{13}n + a_{23})}{(a_{33}^2)^n}.$
---	---	--

План решения

1. Действуя так же, как в первом пункте задачи №2, легко показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{11}n + a_{12}}{a_{23}n^2 + a_{13}n}$, составленный из модулей членов исходного ряда, расходится (проделайте это!). Исходный ряд является знакопередающимся, так как он имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$, где $b_n > 0$. Далее имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{11}n + a_{12}}{a_{23}n^2 + a_{13}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{11}n}{a_{23}n^2} = \frac{a_{11}}{a_{23}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Осталось доказать, что b_n монотонно убывает, хотя бы начиная с некоторого номера N (проделайте это, вычисляя производную по переменной n от члена b_n). Таким образом, исходный ряд сходится по признаку Лейбница.

Итак, исходный ряд условно сходится.

2. В пункте 4 задачи №2 уже доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_{13}n + a_{23}) \ln(a_{13}n + a_{23})}$, составленный из модулей членов исходного ряда, расходится. Там же было отмечено, что $a_n = \frac{1}{(a_{13}n + a_{23}) \ln(a_{13}n + a_{23})} \downarrow 0$. Исходный ряд является знакопередающимся, поэтому он сходится по признаку Лейбница.

Итак, исходный ряд сходится условно.

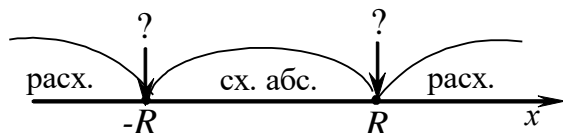
3. Точно так же, как в пункте 2 задачи №2, доказывается, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{13}^{n+a_{23}}}{(a_{33}^2)^n}$, составленный из модулей членов исходного ряда, сходится. Поэтому, применяя признак абсолютной сходимости, заключаем, что исходный ряд абсолютно сходится.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Задача заключается в том, чтобы найти область сходимости ряда — те значения переменной x , при которых функциональный ряд сходится.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, $c_n \in R$ — коэффициент степенного ряда

1) Найти радиус сходимости ряда (4) $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}$. Значение R



определяет интервал сходимости степенного ряда. Поведение ряда (4) демонстрируется рисунком.

2) Исследовать поведение ряда (4) на концах интервала сходимости при $x = R$ и $x = -R$.

ЗАДАЧА №4

Найти области сходимости степенных рядов:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(a_{11}^2)^n \cdot (a_{23}n + a_{13})}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{13}^{n+a_{23}}}{\sqrt{n} \cdot (a_{11}n + a_{23})} \cdot x^n.$$

План решения

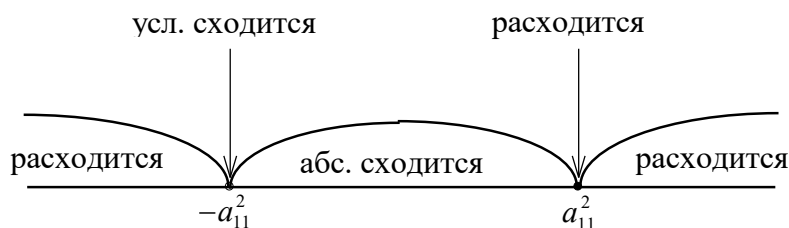
1. Так как $|c_n| = c_n = \frac{1}{(a_{11}^2)^n \cdot (a_{23}n + a_{13})}$, то найдем радиус сходимости. Имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{11}^2 \cdot \sqrt[n]{a_{23}n + a_{13}}} = \frac{1}{a_{11}^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{23}n + a_{13}}}. \text{ Из теории пределов известно, что}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{23}n + a_{13}} = 1. \text{ Поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{a_{11}^2} \text{ и } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = a_{11}^2.$$

При исходный ряд превращается в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_{23}n + a_{13}}$, который расходится (докажите это, применяя признак эквивалентности).

При $x = -a_{11}^2$ получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_{23}n + a_{13}}$, который сходится условно (покажите это, используя признак Лейбница). Полная область сходимости хорошо видна на схеме:



2. Так как $|c_n| = c_n = \frac{a_{13}n + a_{23}}{\sqrt{n} \cdot (a_{11}n + a_{23})}$, то

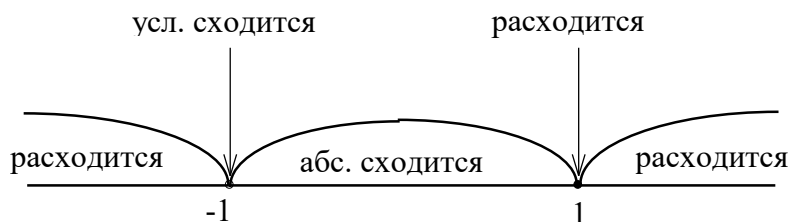
$$|c_{n+1}| = \frac{a_{13}(n+1) + a_{23}}{\sqrt{n+1} \cdot (a_{11}(n+1) + a_{23})} = \frac{a_{13}n + a_{13} + a_{23}}{\sqrt{n+1} \cdot (a_{11}n + a_{11} + a_{23})}$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{13}n + a_{13} + a_{23})\sqrt{n} \cdot (a_{11}n + a_{23})}{\sqrt{n+1} \cdot (a_{11}n + a_{11} + a_{23})(a_{13}n + a_{23})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{13}\sqrt{n} \cdot a_{11}n}{\sqrt{n} \cdot a_{11}n \cdot a_{13}n} = 1 \Rightarrow R=1.$$

При $x=1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{13}n + a_{23}}{\sqrt{n} \cdot (a_{11}n + a_{23})}$, который расходится (докажите это, применяя признак эквивалентности).

При $x=-1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{13}n + a_{23}}{\sqrt{n} \cdot (a_{11}n + a_{23})}$, который сходится условно (покажите это, используя признак Лейбница). Полная область сходимости хорошо видна на схеме:



ЗАДАЧА №5

Следующие примеры решаются разложением в степенные ряды элементарных функций по формулам Маклорена с последующим почленным интегрированием полученных степенных рядов.

$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-1; 1)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$

Приведем характерный пример.

Пример. Вычислить $\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Подставляя в формулу (22) $-x^2$ вместо x , получаем разложение в степенной ряд функции e^{-x^2} :

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Радиус сходимости этого ряда равен бесконечности. Этот ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку прямой. Имеем:

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx = \int_0^{0,25} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{0,25} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(2n+1) \cdot 4^{2n+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \dots$$

Очевидно, полученный ряд удовлетворяет всем условиям признака Лейбница.

Так как $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 10^{-4} = \varepsilon$, то для достижения нужной точности можно отбросить все

члены полученного ряда, начиная с третьего, то есть $\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} = \frac{47}{192}$ с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

□

В следующих примерах нужно также вычислить приближенные значения интегралов с точностью $\varepsilon=10^{-4}$:

1. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
3. $\int_0^1 x^2 \cdot \sin x dx$
5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3} dx$
7. $\int_0^{0,1} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx$
9. $\int_0^{0,3} \sqrt{x} \cdot \cos x dx$

2. $\int_0^{0,3} \ln(1+x^3) dx$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$
6. $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right) dx$
8. $\int_0^{0,4} \frac{\arctg(x)}{x} dx$
10. $\int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2} dx$

ПОЯСНЕНИЕ

Номер варианта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.

Контрольная работа №2 по математическому анализу

№ варианта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	4	-2	3	-4	5	6	7	-8	9
2	2	10	9	8	-7	6	11	-12	13
3	3	4	5	-6	7	8	9	-10	6
4	2	2	10	8	-6	3	1	5	-7
5	5	1	3	4	-2	6	8	-7	9
6	6	5	1	-7	3	4	-2	2	3
7	7	3	4	5	8	9	10	6	4
8	8	-6	2	3	4	1	-4	3	-5
9	9	7	8	1	-1	2	3	-4	2
0	10	8	7	2	9	5	6	1	-2